Tarea de Teoria de Números 2014
Entrenamiento XXVIII OMM Zacatecas
Adrián Celes
Julio 2014

Hola. He aquí la tarea de Teoría de Números para novatos. La tarea debe de entregarse al inicio de la primera sesión de su próximo entrenamiento en Agosto. Como ya les habían comentado, son 10 problemas los cuáles hay qué hacerlos todos. Les comento también que yo calificaré la tarea de Teoría de Números :).

Es bien importante el trabajo que hagan ustedes en casa, nosotros como entrenadores tenemos la tarea de darles herramientas y consejos para la resolución de problemas, pero justo de eso es lo que se tienen qué encargar ustedes, de resolver problemas. En años pasados, la diferencia entre el 6° y 7° lugar del examen selectivo fue apenas de medio punto, así que cada décima de punto, como los puntos de las tareas, cuenta. Procuren escribir sus ideas en cada problema aunque no lleguen a la solución: Es mejor tener 2 o 3 puntos que 0 puntos.

Les recuerdo mi correo: adrianceles@cimat.mx, en el cuál pueden preguntarme dudas de redacción en los problemas de tarea, comentarme alguna idea, incluso preguntarme si van bien o mal en su procedimiento o alguna sugerencia sobre cómo proceder de donde se quedaron, lo importante es que sigan trabajando en su tarea.

Existe muchísimo material para entrenar, desde los Cuadernos de Olimpiada, las revistas Tzaloa y páginas de internet. Respecto a los Cuadernos de Olimpiada, les recomiendo fuertemente conseguir los libros de Teoría de Números-Morado, Geometría-Amarillo, Combinatoria-Rojo y Problemas Avanzados-Naranja. Finalmente, les deseo suerte en este proceso rumbo al nacional de la OMM.

Adrián Celes.

Enunciados de los Problemas

1. Demuestra que no existen soluciones enteras y positivas para la ecuación

$$3^m + 3^n + 1 = t^2$$

2. Determina todos los enteros positivos (m, n) tales que satisfacen la ecuación $3^m + 7 = 2^n$.

3. Demuestra que no existe un polinomio con coeficientes enteros $P(x)$ tal que $P(7) = 5$ y $P(15) = 9$.

4. Encuentra los elementos del conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$$

5. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $a^t \equiv 1 \pmod{n}$ para algún entero $t \geq 1$ si, y sólo si, a y n son primos relativos.

6. Demuestra que para cada entero n:

   - $n^5 - 5n^3 + 4n$ es divisible por 120.
   - $n^2 + 3n + 5$ no es divisible por 121.

7. Demuestra que si a y 240 son primos relativos, entonces 240 es un divisor de $a^4 - 1$.

8. Demuestra que no existe números enteros p, q y k, con p, q primos, tales que

$$p - q = 2 \qquad \text{y} \qquad pq + 10^k$$

   son números primos.
   (*Sugerencia:* Procede por contradicción. Analiza los 3 distintos casos módulo 3 para p).

9. Demuestra que $n^{n-1} - 1$ es divisible por $(n-1)^2$, para todo entero $n > 1$.

10. Determina el número enteros $n > 1$ tales que $a^{13} - a$ es divisible entre n para todo entero a.
    (*Sugerencia:* Demuestra que n es producto de primos distintos. ¿Cuál es el menor entero positivo de la forma descrita al inicio, al cual debe de dividir n? Demuestra que

$$a^{13} \equiv a \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$$

    y concluye).