Soluciones del Examen Fase Regional de la 29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas – Etapa Estatal

24 de Abril de 2015

Solución 1. (d) Haciendo las divisiones correspondientes es fácil darse cuenta de que el único que no es entero es $2014/4$.

Solución 2. (d) El perímetro del triángulo de Jimena es 6 + 10 + 11 = 27, así que cada uno de los lados del triángulo equilátero mide 27/3 = 9.

Solución 3. (a) Al armar el cubo las parejas de lados opuestos son {1, 3},{2; 4} y {5; 6}, así que las sumas que obtiene Hansel son 4, 6 y 11.

Solución 4. (e) Cada semana completa leerá 25 páginas. Entonces, en 9 semanas completas habrá leído 225 páginas. Esto ocurrirá un sábado. Como 239-225 = 14, el domingo leerá 5 páginas y 14-5 = 9, terminará un miércoles.

Solución 5. (e) En total pagaron 15 pesos, así que cada galleta costó 50 centavos. A Fernanda deberán haberle tocado 16 galletas.

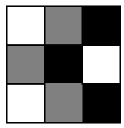
Solución 6. (b) Como hay grises juntos y también negros, al menos deben pintarse 2. Con 2 basta repintando como se muestra:

Solución 7. (b) Como todos los amigos de Max dicen una cantidad diferente, a lo más uno de ellos puede estar diciendo la verdad; por tanto, a lo más uno de sus amigos estudió. Tenemos dos posibilidades:- Si ninguno de sus amigos estudió, entonces Octavio dice la verdad, pero entonces tendríamos que Octavio estudió y, en consecuencia, sería falso que ninguno de sus amigos estudió. Luego, tenemos que esta opción no puede suceder. - Si exactamente uno de sus amigos estudió, entonces Gabriela dice la verdad (y es la única que estudió).

Solución 8. (e) El área del semicírculo es de $\pi/2$. La parte sombreada de abajo es la mitad de la diferencia entre el área del cuadrado y la de dos semicírculos, o sea, $(4-\pi)/2$. En total el área sombreada es de $\pi/2\ +(4-\pi)/2\ =\ 2$.

Solución 9. (b) Si la persona adicional fuera mujer se repetiría el mes de nacimiento, así que ya hay 12 mujeres en la fiesta (una de cada mes). Si la persona adicional fuera hombre se repetiría el día de la semana en que nació, así que ya hay 7 hombres en la fiesta (uno que nació cada día de la semana). En total, hay 19 personas.

Solución 10. (c) Prolonguemos la horizontal superior y la vertical derecha hasta que se corten. Se formaría, junto con las partes sombreadas, un triángulo rectángulo con área $(1.5\times 2)/\ 2\ =\ 1.5$ y el pedazo agregado tiene área $.5$ así que el área sombreada es 1.



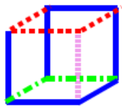
Solución 11. (c) Como el área del cuadrado y el pentágono son consecutivos, el área del triangulito que se forma al doblar la esquina es de 1 cm. Luego, como el cuadrado puede dividirse en 8 triángulos iguales a ese, su área es 8 cm².

Solución 12. (d) Llamemos a a la cantidad de ramas con 5 hojas, b a la cantidad de ramas con 2 hojas y h al número total de hojas. Tenemos que $5a+2b\ =\ h$. También sabemos que $a+b\ =\ 9$. Multiplicando esta última ecuación por 5 y restándole la primera tenemos que $3b\ =\ 45-h$; de aquí deducimos que h debe ser múltiplo de 3, de manera que la respuesta 32 no es posible. Las demás sí son posibles: $5(9)\ +\ 2(0)\ =\ 45$, $5(7)\ +\ 2(2)\ =\ 39$, $5(6)\ +\ 2(3)\ =\ 36$ y $5(2)\ +\ 2(7)\ =\ 24$.

Solución 13. (c) Llamemos p al promedio de los alumnos que no aprobaron. Luego, tenemos que $0.6(8) + 0.4(p) = 6$, de donde $p = 3$.

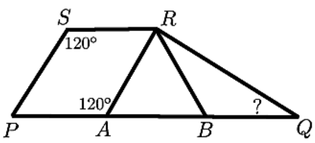
Solución 14. (b) Llamemos L a la longitud del lado mayor del rectángulo y l a la longitud del lado menor. De acuerdo a las cantidades que obtuvieron, tenemos que Monserrat sumó tres lados sin incluir uno de los menores (de donde obtenemos $2L + l = 44$) e Isabela sumó tres lados sin incluir uno de los mayores (de donde obtenemos $L + 2l = 40$). Sumando ambas ecuaciones obtenemos $3L + 3l = 84$, de donde $L + l = 28$. Luego, el perímetro del rectángulo mide 56 cm.

Solución 15. (c) Es claro que hay que cambiar al menos un asterisco por un +. Cambiando solamente uno, el valor máximo que podríamos conseguir es $2 - 1 + 5 - 2 - 1 - 5 - 2 - 1 - 5 = -15$, así que un cambio no es suficiente. Es posible conseguir que la ecuación se cumpla con dos cambios, por ejemplo: $2 - 0 - 1 + 5 - 2 - 0 - 1 + 5 - 2 - 0 - 1 - 5 = 0$.



Solución 16. (d) A cada vértice del cubo llegan 3 aristas, como no se traslapan los alambres, al menos en cada vértice debe haber el extremo de una de las piezas de alambre. De esta forma, debe haber al menos 8 extremos de alambre para formar el cubo, es decir, deben usarse al menos 4 pedazos. En la figura se muestra cómo los alambres que miden 1, 2, 3 y 6 cm de longitud pueden rodear al cubo.

Solución 17. (d) Sean A y B los puntos sobre PQ de manera que $PA = AB = BQ$. Tenemos entonces que $PARS$ es paralelogramo, de donde $\angle PAR = 120°$. De aquí resulta que $\angle RAB = 60°$ y entonces el triángulo RAB es equilátero. En consecuencia, el triángulo RBQ es isósceles, con $RB = BQ$ y el ángulo en B igual a $120°$. El ángulo buscado es $(180° - 120°)/2 = 30°$.



Solución 18. (e) Sean a, b, c y d las distancias ente puntos consecutivos. Los números 2, 5 y 6 no son suma de otros así que tres de los números a, b, c y d son 2, 5 y 6. Por otro lado, 22 es la distancia mayor así que debe ser la suma de a, b, c y d, y entonces las cuatro distancias entre puntos consecutivos son 2, 5, 6, 9. Ahora, 8 es una de las sumas, por lo que 2 y 6 están juntos, También 15 es una suma, y por lo tanto 6 y 9 están juntos. Como 7 no es ninguna suma, 2 y 5 no están juntos. El único acomodo posible es que las distancias estén en orden 2, 6, 9 y 5 (o a la inversa). El número faltante es $9 + 5 = 14$.

Solución 19. (c) Hay que intentar poner cada uno de los 10 dígitos en todas las posiciones marcadas con guiones en _1_4_2_7_0_9_ . Eso nos dará un total de 70 posibilidades, pero al hacer esa lista, los números 1142709, 1442709, 1422709, 1427709, 1427009 y 1427099 aparecen dos veces. Luego, en total hay que intentar $70 - 6 = 64$ números.

Solución 20. (d) Observemos primero que para conocer todos los renglones de cualquier línea, basta conocer dos de los números de la línea, pues en cada línea los números consecutivos se obtienen sumando o restando la misma cantidad. Como hay dos números en la columna central, es fácil completar ésta. De ahí se puede pasar fácilmente a completar los renglones que tienen el 1 y el 4. Pero entonces ya se tendrán dos números en el renglón que contiene el cuadro sombreado. En la primera figura mostramos sólo las cuentas necesarias para obtener la respuesta. En la segunda mostramos la cuadrícula completa.